

La forme de la Terre : un problème mathématique ?



EtiereChys

CNRS/ENS Lyon

Eppur si muove

 QuickTime® et un
 dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.



Newton

1642-1727 (1689)



Huygens 1690



J. Cassini 1701



Maupertuis 1732



Euler 1740



Clairaut 1733



D'Alembert 1756



MacLaurin (1742)

Ellipsoïde de MacLaurin

QuickTime® et un
H.264
compressor sont requis pour visionner cette image.



Lagrange 1759



Laplace 1772



Legendre 1784



Monge 1787



Gauss 1813



Cauchy 1815



Poisson 1811



Jacobi (1834)

Ellipsoïde de Jacobi

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.



Dirichlet 1857



Dedekind 1860



Riemann 1860





Sur l'équilibre d'une masse fluide animée
d'un mouvement de rotation,

Acta Mathematica 7 (1885), 259-380.

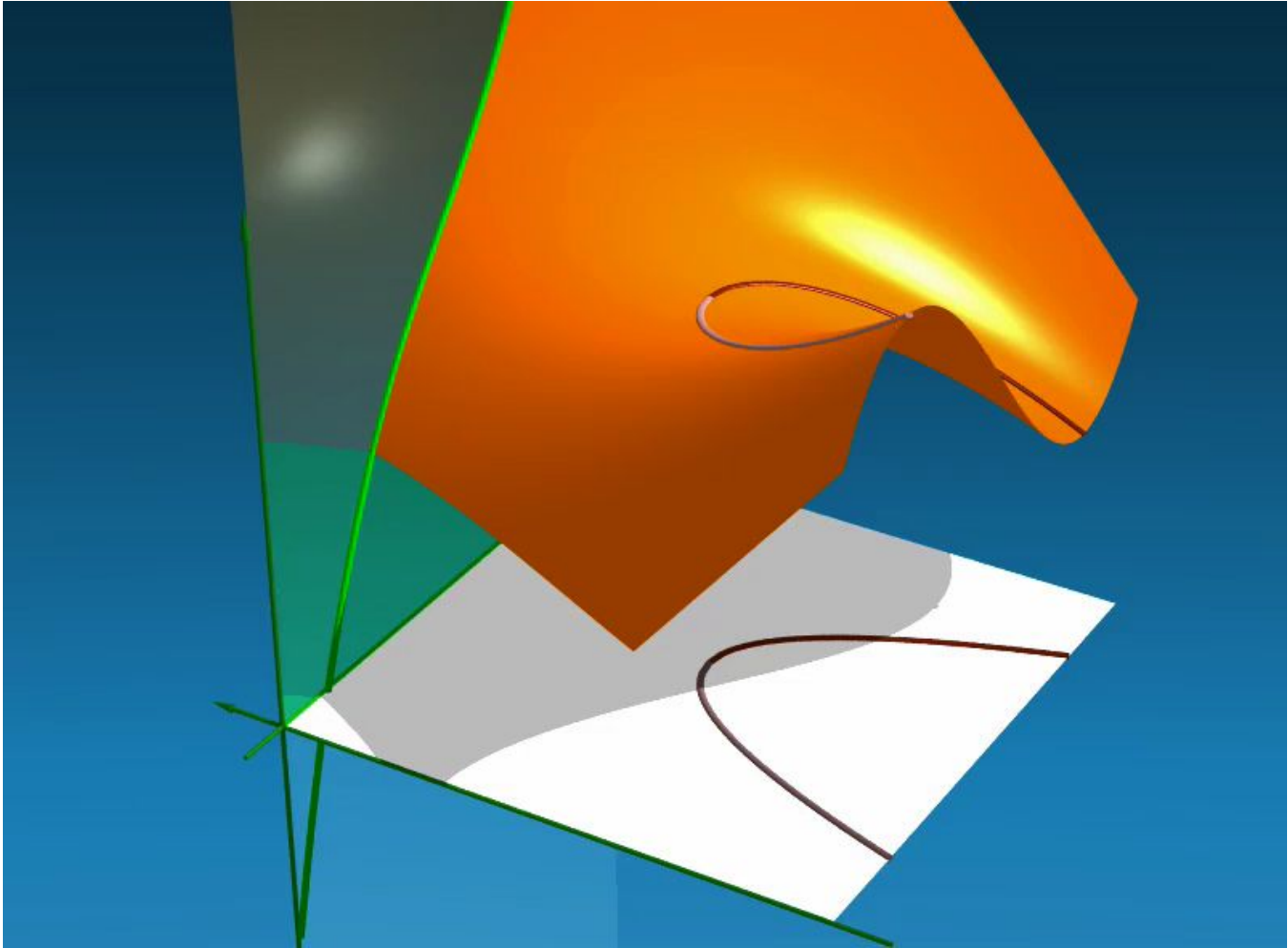
Poincaré (1854-1912)

La famille des MacLaurin dépendant d'un paramètre

 QuickTime® et un
 compresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.

Bifurcation

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.



Bifurcation en présence de symétrie

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.

\mathcal{F} = l'espace des formes concevables pour la terre.

U = énergie totale (gravitationnelle + cinétique) de la terre tournant à vitesse constante avec un moment d'inertie L

On cherche les « points critiques » de la fonction U définie sur l'espace \mathcal{F} (de dimension infinie), dépendant d'un paramètre L .

Les solutions dépendent de L et subissent des « bifurcations » lorsque la dérivée seconde de U présente des valeurs propres nulles.

La fonctionnelle U est symétrique : invariance par les rotations

Le chapeau mexicain

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.

Jacobi

MacLaurin

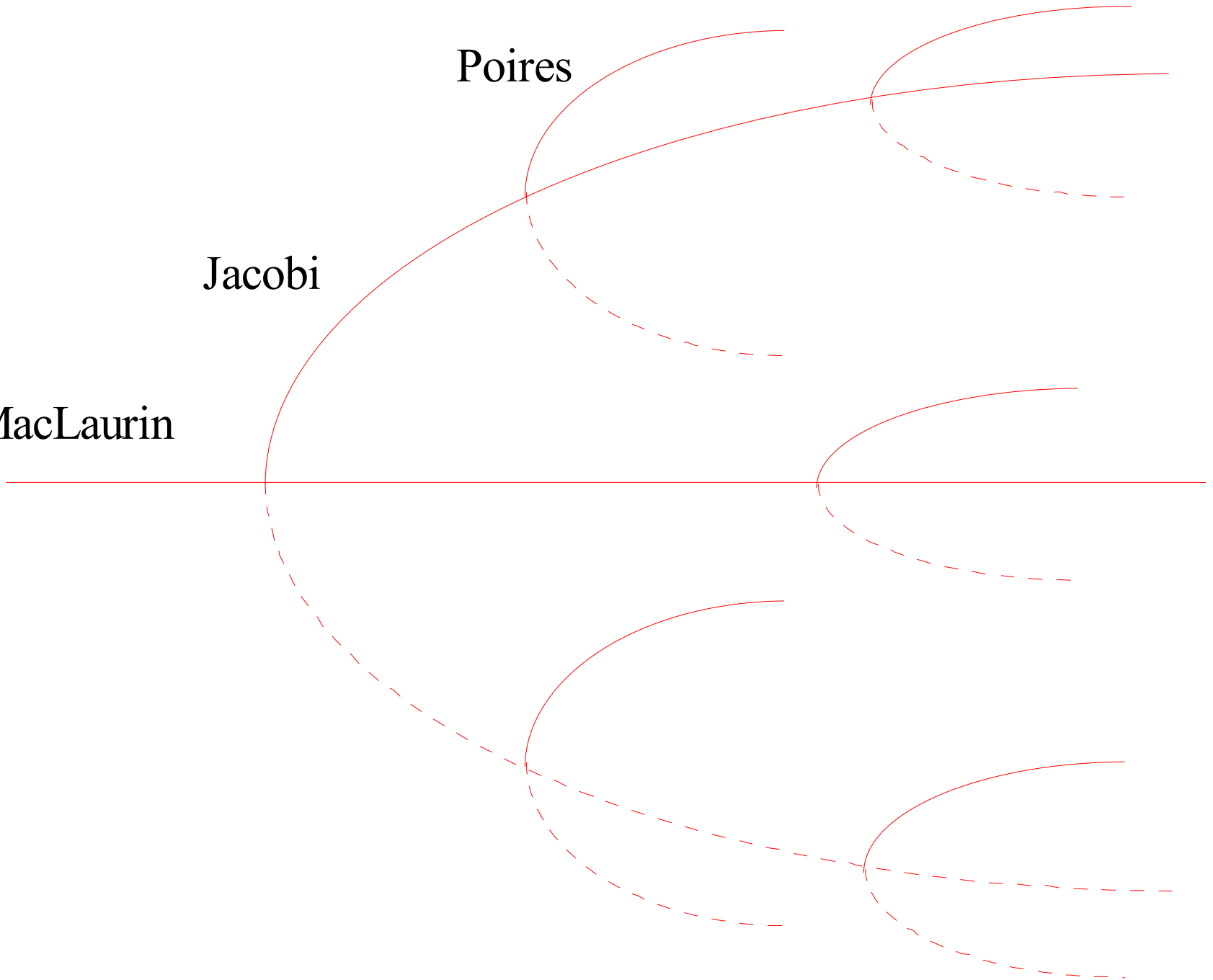
La bifurcation MacLaurin-Jacobi

QuickTime® et un
H.264
compressor sont requis pour visionner cette image.

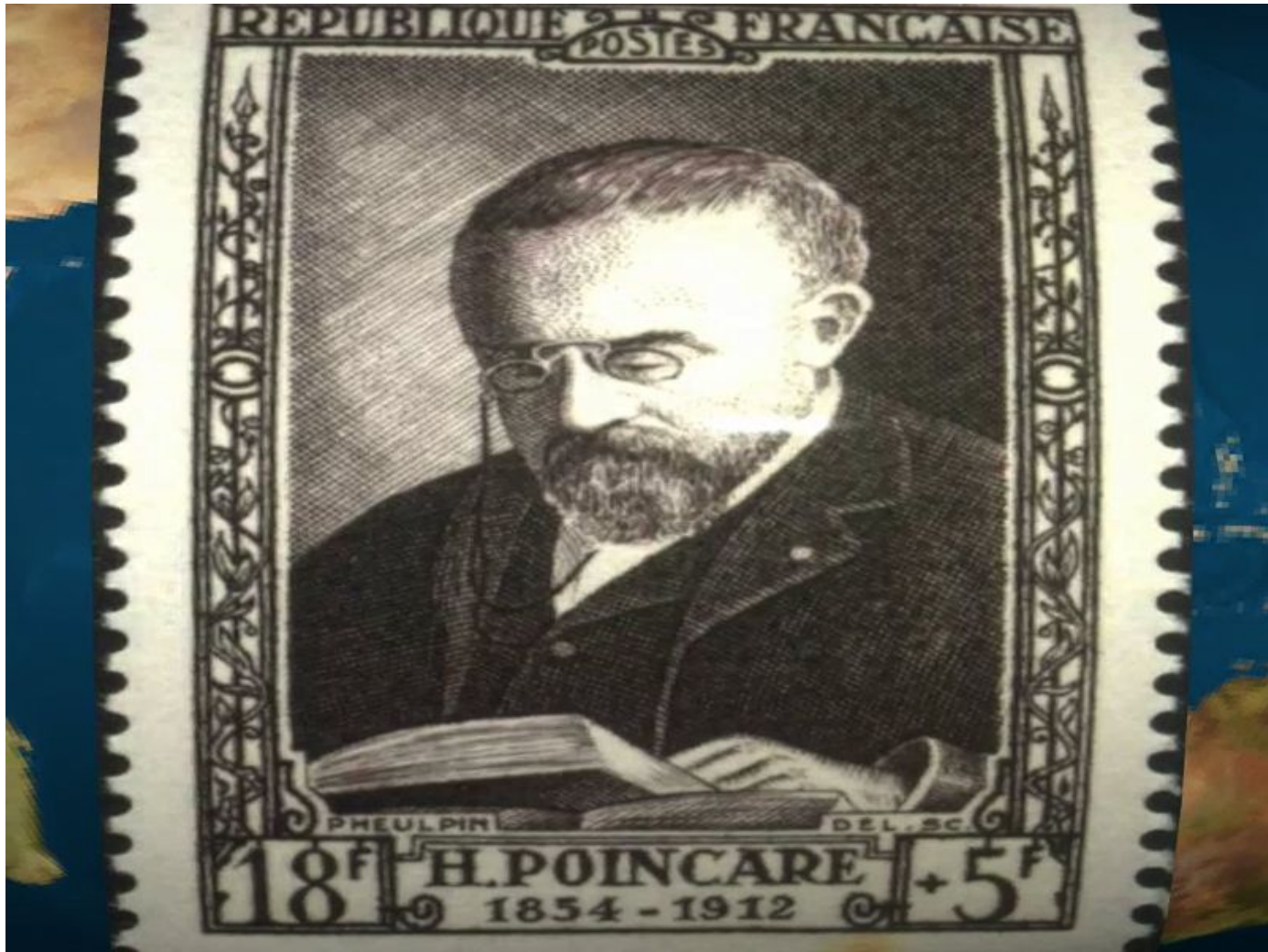
MacLaurin

Jacobi

Poires



Bifurcations MacLaurin-Jacobi-Poires



Étant donné un ellipsoïde de Jacobi de moment L , il faut calculer la dérivée seconde de l'énergie dans l'espace des formes possibles, voisines de l'ellipsoïde.

Une telle forme est décrite par une fonction sur l'ellipsoïde : la « hauteur » par rapport à l'ellipsoïde.

Il faut donc faire de « l'analyse harmonique » sur l'ellipsoïde :

Fonctions de Lamé, analogues aux harmoniques sphériques.

Quadriques homofocales et coordonnées elliptiques

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda} = 1$$

$$0 < a < b < c$$

$$\lambda < a$$

ellipsoïde

$$a < \lambda < b$$

Hyperboloïde à une nappe

$$b < \lambda < c$$

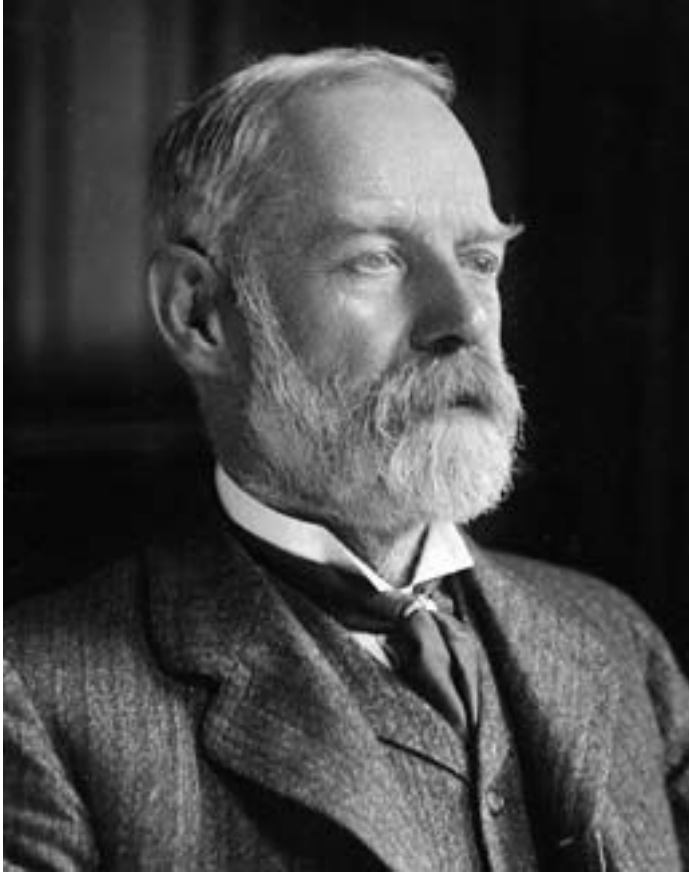
Hyperboloïde à deux nappes

$$c < \lambda$$

vide

QuickTime® et un
dZcompresseur H.264
sont requis pour visionner cette image.

La suite...



Darwin 1906



Jeans 1917



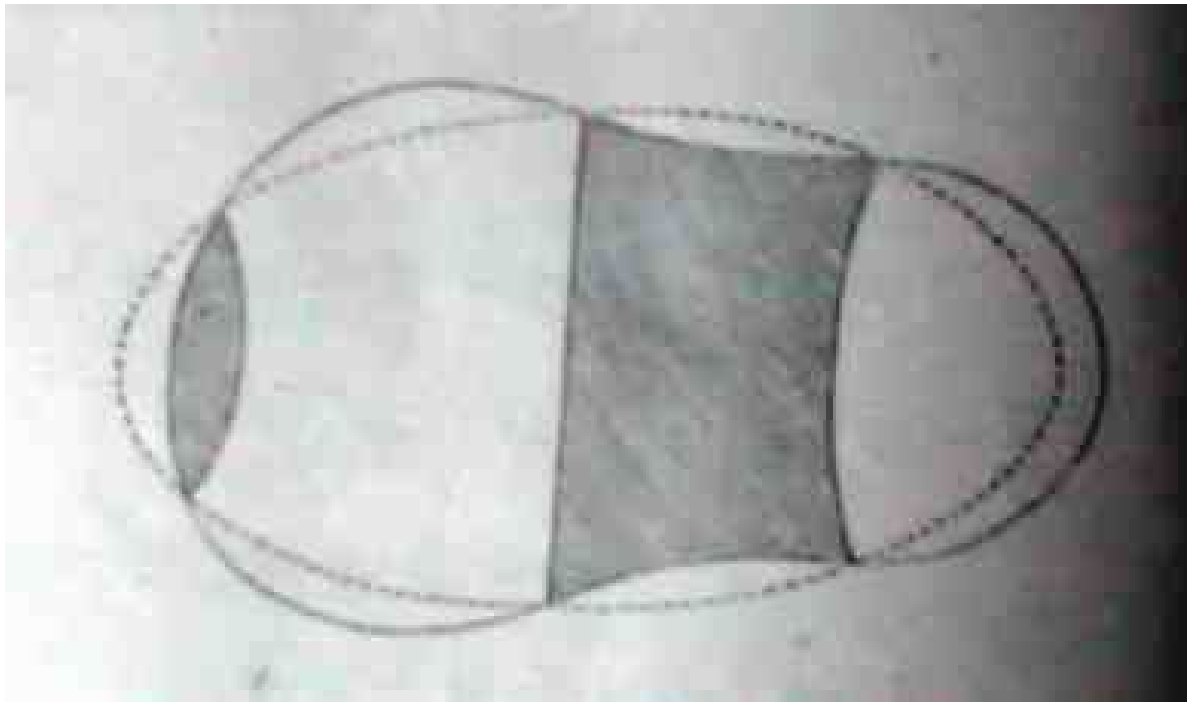
E. Cartan 1924

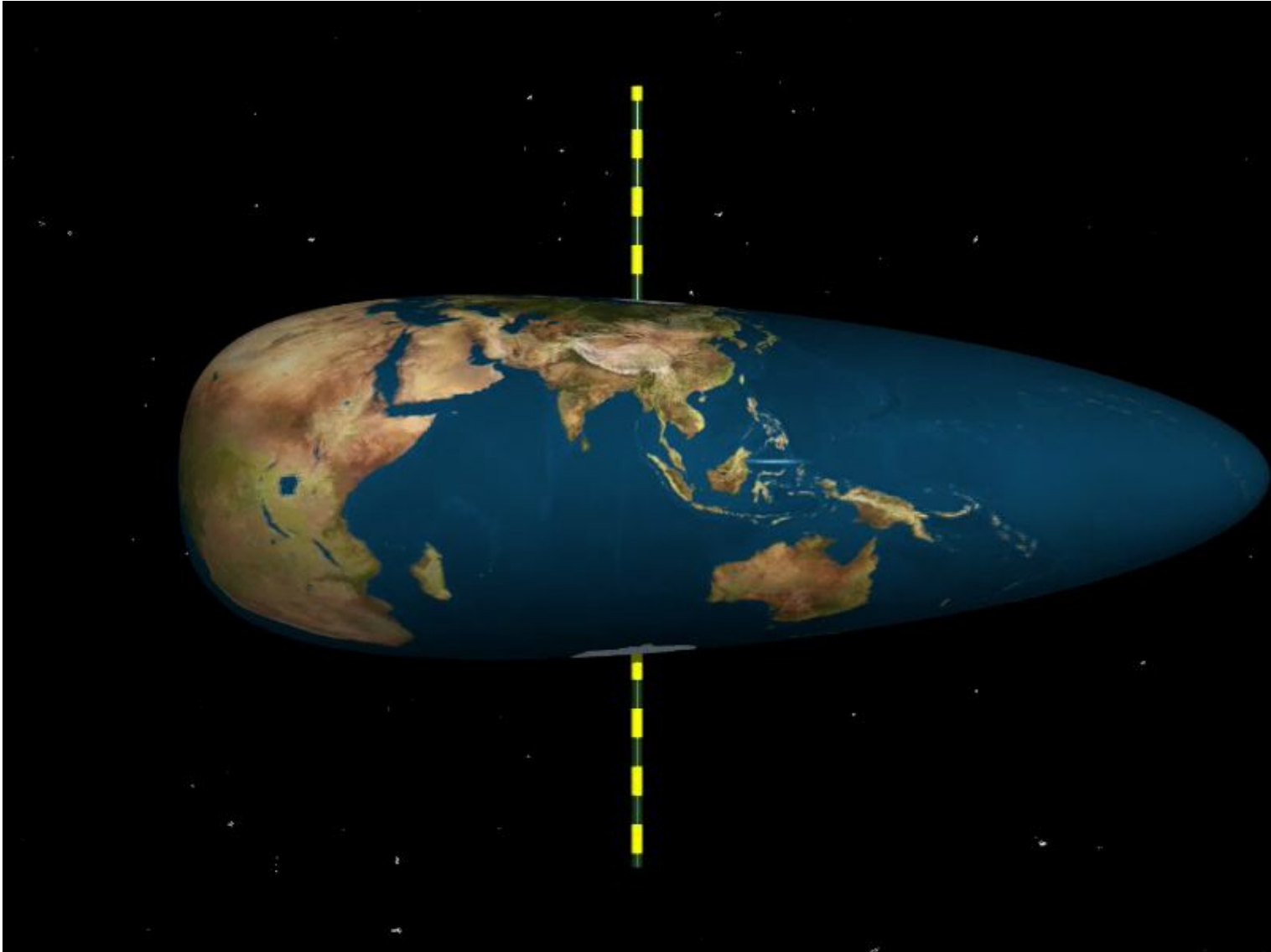


Chandrasekhar 1960

La « poire » de Poincaré... origine
des satellites ???

le rôle de l'image.





« The grand mental panorama that was thus created was so intoxicating that those following Poincaré were not to recover from its pursuit. »

« And at this point the subject quietly went to a coma. »

(Chandrasekar)

La « vraie » suite ?

Le concept de bifurcation est devenu un concept central en sciences

- Théorie des catastrophes (Thom 1960)
- Développement de l'analyse fonctionnelle pour comprendre les problèmes en dimension infinie.
- Théorie des bifurcations en systèmes dynamiques, transition vers le chaos.
- Brisures de symétries en physique.

Théorème de Thom

Lorsqu'un système dépend de moins de 4 paramètres, il ne rencontre en général que 7 types de catastrophes:

Le pli

La frouce

La queue d'aronde

Le papillon

L'ombilic elliptique

L'ombilic hyperbolique

L'ombilic parabolique

Les sept catastrophes élémentaires de Thom

$$x^3 + ux$$

$$x^4 + ux^2 + vx$$

$$x^5 + ux^3 + vx^2 + wx$$

$$x^3 + y^3 + uxy + vx + wy$$

$$x^3/3 - xy^2 + u(x^2 + y^2) + vx + wy$$

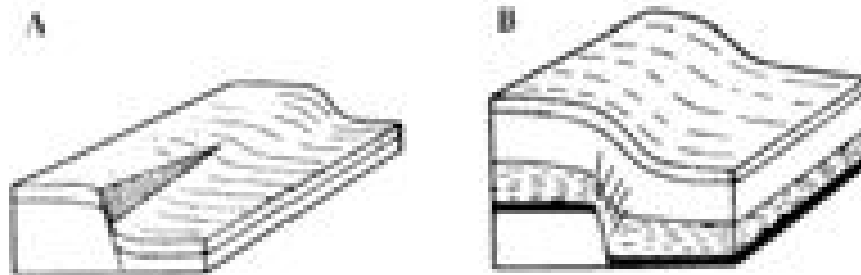
$$x^6 + ux^4 + vx^3 + wx^2 + tx$$

$$x^2y + y^4 + ux^2 + vy^2 + wx + ty$$

Cliché 5

La fronce (catastrophe de Riemann-Hugoniot) en géologie : naissance d'une faille (voir figure 5-3).

D'après E. Scherbon Hills, *Elements of Structural Geology*, Methuen, London, 1963.

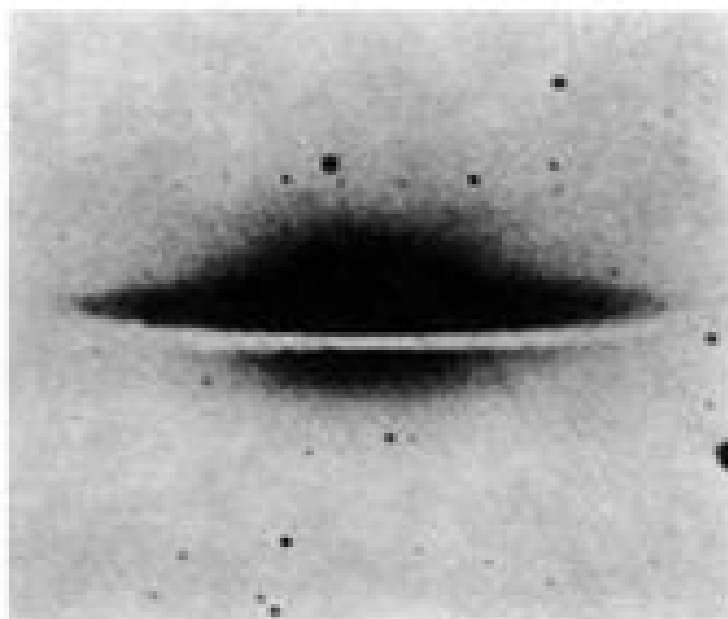


Cliché 5

Cliché 25

Nébuleuse plus ancienne en déferlement équatorial : NGC 4594.

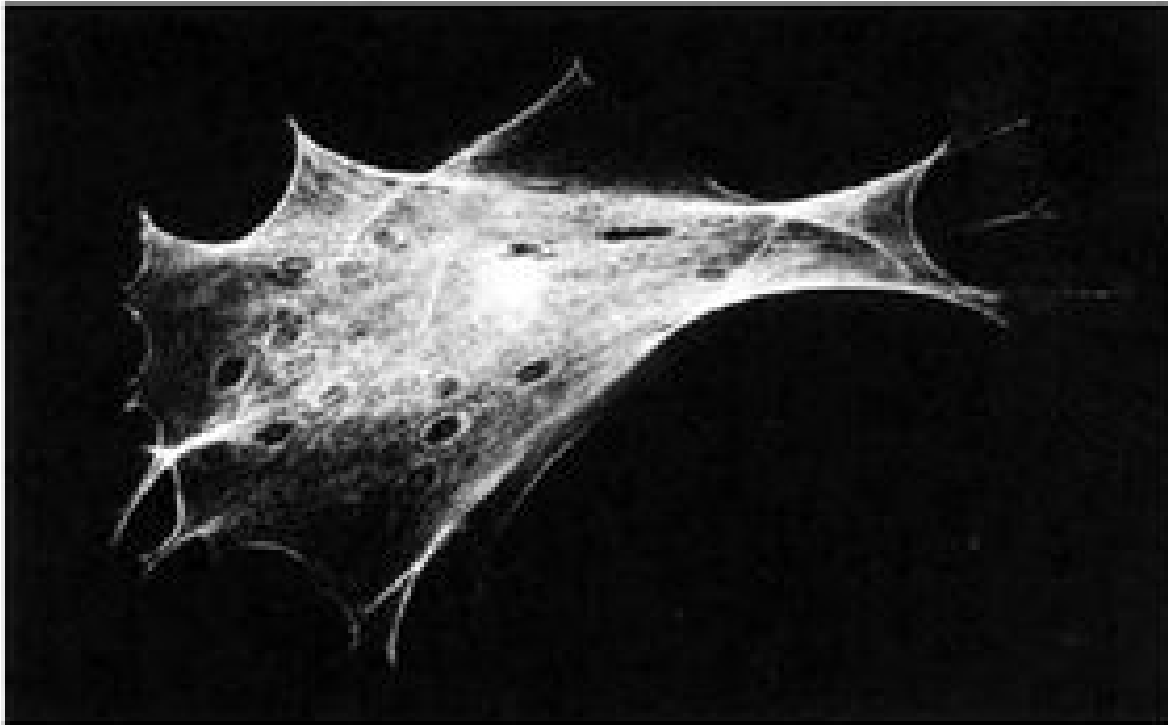
D'après S. Chandrasekhar, *Principles of Stellar Dynamics*, Dover, New York, 1960.



Cliché 25

Cliché 6, [1968]

La queue d'aronde en optique géométrique. La singularité ponctuelle ébauchée en C1 se déploie en C2 (voir figure 5-7).



Cliché 6a

Cliché 29 [1975]

The hyperbolic umbilic in hydrodynamics : a wave breaking.



Cliché 29

Henri Poincaré :

Les formes d'équilibre d'une masse fluide en rotation

Revue générale des Sciences, (3), 809-815 (1892).

« Mais je m'arrête là, il est inutile de multiplier les hypothèses puisque toutes ces questions doivent rester provisoirement indécises. »

Un grand merci à Jos Leys !

Mathematical Imagery :
<http://www.josleys.com/>